

MASTER'S DEGREE ENTRANCE EXAM (SAMPLE)

1. Find the convergence area of the functional series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n-1} \left(\frac{1-x}{1+2x} \right)^n.$$

2. Given the C-function equation(). If it contain some mistakes, prove it, and answer «WRONG FUNCTION». If it's possible to create functions f() и g() such, that function equation() always returns TRUE, write the code of these functions. Otherwise, prove that at least one of the functions f() or g() cannot be created.

```
#include <stdio.h>
int f(void);
int g(const int *, int);
int equation(void)
{
    int a[1024] = {0};
    int i;
    if (scanf("%d", &i) == 1 && 10 <= i && i < 100)
    {
        a[i] = 2023;
        return a[g(&a[10], 90)] == 2023;
    }
    return f() == 1 - f();
}
```

3. The space L_1 is a linear span of vectors $\bar{g}_1(2, 3, 2)$ and $\bar{g}_2(1, 1, 3)$, and the space L_2 is a linear span of vectors $\bar{f}_1(1, 1, 1)$ и $\bar{f}_2(2, 1, 4)$. Find the distance between point $M(3, 4, -1)$ and intersection of spaces L_1 and L_2 .

4. Find all solutions of differential equation

$$y - y' = y^2 + xy',$$

that satisfy condition $y(2) = 3$.

5. Simple unoriented graph G has 65 vertices and 2021 edge. Could the graph G be disconnected? Prove your answer!

6. The probability density of random variable X given by the formula

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{if } |x + 2| \leq 3, \\ 0, & \text{if } |x + 2| > 3. \end{cases}$$

Find the value of A , expectation $M[X]$ and standard deviation $D[X]$ of random variable X .

7. Find the minimum value of function

$$f(A, B, C) = \int_{-1}^1 (x^3 - (Ax^2 + Bx + C))^2 dx.$$

8. Solve the PDE (find $u(x, t)$)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + x^2 t, & -\infty < x < +\infty, 0 \leq t < +\infty; \\ u(x, 0) = \sqrt{x}, u_t(x, 0) = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Answers:

1. $x \in (-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$ 3. $\sqrt{2}$. 4. $y = \frac{x+1}{x-1}$. 5. No.

6. $A = \frac{1}{6}$, $M[X] = -2$, $D[X] = 3$. 7. $8/175$. ($A = C = 0$, $B = 3/5$).

8. $u(x, t) = \frac{\sqrt{x-at} + \sqrt{x+at}}{2} + \frac{\sin x \sin at}{a} + \frac{x^2 t^3}{6} + \frac{a^2 t^5}{60}$.

ПРИМЕРЫ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЗАДАНИЯ В МАГИСТРАТУРУ

1. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n-1} \left(\frac{1-x}{1+2x} \right)^n.$$

2. Дана Си-функция `equation()`. Если она содержит ошибку, обоснуйте это в качестве ответа. Если возможно привести код функций `f()` и `g()`, при которых функция `equation()` всегда возвращает значение `TRUE`, напишите код этих функций. Иначе обоснуйте, что хотя бы для одной из функций `f()` и `g()` это сделать нельзя.

```
#include <stdio.h>
int f(void);
int g(const int *, int);
int equation(void)
{
    int a[1024] = {0};
    int i;
    if (scanf("%d", &i) == 1 && 10 <= i && i < 100)
    {
        a[i] = 2023;
        return a[g(&a[10], 90)] == 2023;
    }
    return f() == 1 - f();
}
```

3. Базисом линейного пространства L_1 являются векторы $\bar{g}_1(2, 3, 2)$ и $\bar{g}_2(1, 1, 3)$, а базисом линейного пространства L_2 – векторы $\bar{f}_1(1, 1, 1)$ и $\bar{f}_2(2, 1, 4)$. Найдите расстояние от точки $M(3, 4, -1)$ до пересечения пространств L_1 и L_2 .

4. Найдите все решения дифференциального уравнения

$$y - y' = y^2 + xy',$$

удовлетворяющие начальному условию $y(2) = 3$.

5. Пусть в простом неориентированном графе 65 вершин и 2021 ребро. Сколько в нем может быть компонент связности? Обоснуйте ваш ответ!

6. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } |x + 2| \leq 3, \\ 0, & \text{если } |x + 2| > 3. \end{cases}$$

Найдите значение константы A , математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$ случайной величины X .

7. Числа A, B, C таковы, что величина

$$\int_{-1}^1 (x^3 - (Ax^2 + Bx + C))^2 dx$$

принимает **минимальное** возможное значение. Найдите это значение.

8. Найдите решение задачи (функцию $u(x, t)$)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + x^2 t, & -\infty < x < +\infty, 0 \leq t < +\infty; \\ u(x, 0) = \sqrt{x}, u_t(x, 0) = \sin x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Ответы:

1. $x \in (-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$.

3. $\sqrt{2}$.

4. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

5. 1.

6. $A = \frac{1}{6}, M[X] = -2, D[X] = 3$.

7. $8/175$. ($A = C = 0, B = 3/5$).

8. $u(x, t) = \frac{\sqrt{x-at} + \sqrt{x+at}}{2} + \frac{\sin x \sin at}{a} + \frac{x^2 t^3}{6} + \frac{a^2 t^5}{60}$.